Ejemplos de división de polinomios

Antes que nada repasemos el método para hacer la división larga (de la casita) de polinomios. Sea $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ el divisor y $q(x) = b_0 + b_1x + \ldots b_mx^m$ el dividendo.

1. Ordenamos los polinomios de modo que las potencias de la variable vayan en orden *decreciente.*

2. Si el grado de $p(x)$ es mayor que el grado de $q(x)$ la división resultará en cociente igual al polinomio 0 y residuo igual a $q(x)$.

3. Si el grado de $p(x)$ es menor o igual que el de $q(x)$ procedemos a dividir b_m entre a_n. Sea $c_{m-n} = \frac{b_m}{a_n}$; notamos que para que el grado del monimo a_nx^n alcance el de b_mx^m necesitamos multiplicar por x^{n-m}, el primer término del cociente será $c_{m-n}x^{m-n}$.

4. Al dividendo restamos el divisor multiplicado por $c_{m-n}x^{m-n}$, es decir, consideramos $q'(x) = q(x) - c_{m-n}x^{m-n} \cdot p(x)$.

5. Repetimos los pasos anteriores considerando ahora a $p(x)$ como divisor y a $q'(x)$ como dividendo, continuamos denotando por c_{n-k} al resultado de dividir el coeficiente del monomio de más alto grado de $q'(x)$ entre a_n.

Puesto que el grado es un número natural (salvo para el polinomio 0) el proceso anterior tendrá que terminar en algún momento, pues cada paso reduce el grado del dividendo.

Algunos ejemplos:

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & & x^2 & +x & -6 \\ \hline
x-1) & x^3 & & -7x & +6 \\
 & -x^3 & +x^2 & & \\ \cline{2-3}
 & & x^2 & -7x & \\
 & & -x^2 & +x & \\ \cline{3-4}
 & & & -6x & +6 \\
 & & & 6x & -6 \\ \cline{4-5}
 & & & & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|rrrrrr}
 & & & & \frac{3}{2}x^2 & -\frac{1}{4}x & -\frac{11}{8} \\ \hline
2x^3+x^2+2x+3) & 3x^5 & +x^4 & & -3x^2 & +2x & -7 \\
 & -3x^5 & -\frac{3}{2}x^4 & -3x^3 & -\frac{9}{2}x^2 & & \\ \cline{2-5}
 & & -\frac{1}{2}x^4 & -3x^3 & -\frac{15}{2}x^2 & +2x & \\
 & & \frac{1}{2}x^4 & +\frac{1}{4}x^3 & +\frac{1}{2}x^2 & +\frac{3}{4}x & \\ \cline{3-6}
 & & & -\frac{11}{4}x^3 & -7x^2 & +\frac{11}{4}x & -7 \\
 & & & \frac{11}{4}x^3 & +\frac{11}{8}x^2 & +\frac{11}{4}x & +\frac{33}{8} \\ \cline{4-7}
 & & & & -\frac{45}{8}x^2 & +\frac{11}{2}x & -\frac{23}{8}
\end{array}
$$

En el caso de que el dividendo sea de la forma $x - k$ para alguna constante k podemos reducir el número de cálculos involucrados utilizando la división sintética, ésta consiste en sólo anotar la información relevante. Observen que en este caso $a_0 = -k$ y $a_1 = 1$ es el coeficiente de mayor grado, por esta razón al considerar cualquier $q(x) = b_0 + b_1x + \ldots b_mx^m$ tendremos que $c_{m-1} = b_m/1 = b_m$ y $q'(x) = q(x) - b_mx^{m-1}(x-k) = (b_{m-1} - (-k)b_m)x^{m-1} + b_{m-2}x^{m-2} + \ldots b_1x + b_0$. De lo anterior obtenemos que $c_{m-1} = (b_{m-1} - (-k)b_m)/1 = (b_{m-1} - (-k)b_m)$, en este caso la expresión para $q''(x)$ es un poco más complicada $q''(x) = q'(x) - (b_{m-1} - (-k)b_m)x^{m-2}(x-k) = (b_{m-2} - (b_{m-1} - (-k)b_m)(-k))x^{m-2} + b_{m-3}x^{m-3} + \ldots$. Un ejemplo aclarará las cosas, usaremos el mismo polinomio que en el primer ejemplo anterior:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -7 & 6 \\ 1 & & 1 & 1 & -6 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

Otro ejemplo:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 3 & 1 & 0 & -3 & 2 & -7 \\ -4 & & -12 & 44 & -176 & 716 & -2872 \\ \hline & 3 & -11 & 44 & -179 & 718 & -2879 \end{array}$$

El ejemplo anterior, usando la división larga se vería así:

$$\begin{array}{r|l} & 3x^4 - 11x^3 + 44x^2 - 179x + 718 \\ \hline x+4 & 3x^5 + x^4 \qquad - 3x^2 + 2x - 7 \\ & -3x^5 - 12x^4 \\ \cline{2-2} & -11x^4 \\ & 11x^4 + 44x^3 \\ \cline{2-2} & 44x^3 - 3x^2 \\ & -44x^3 - 176x^2 \\ \cline{2-2} & -179x^2 + 2x \\ & 179x^2 + 716x \\ \cline{2-2} & 718x - 7 \\ & -718x - 2872 \\ \cline{2-2} & -2879 \end{array}$$

La división sintética es muy útil para verificar que un número sea raíz de un polinomio sin evaluar directamente, esto gracias al teorema probado en clase que afirma que $(x-a) \mid f(x)$ si y sólo si $f(a) = 0$ para cualquier polinomio $f(x)$. Por ejemplo, en el primer ejemplo de división sintética se demostró que 1 es raíz de $x^3 - 7x + 6$ puesto que el residuo de la división $(x^3 - 7x + 6) \div (x - 1)$ fue 0.

Par de notas: Lo anterior vale igualmente para polinomoios cuyos coeficientes sean números complejos.

Algunas personas, en la división sintética, ponen el término constante del dividendo del otro lado, el procedimiento sin embargo es enteramente igual.